



مهدی شاکریان
shakeran.com

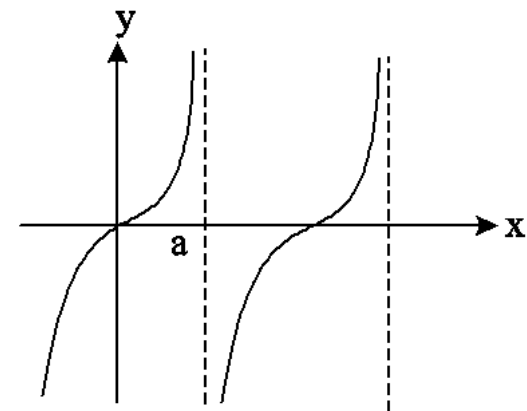
مدت زمان آزمون: --

نام و نام خانوادگی:

نام آزمون: مثلثات دوازدهم درس ۱

منبع: قلم چی دو سال اخیر

① با توجه به نمودار $f(x) = 4 \tan \frac{x}{4}$ ، کدام a است؟



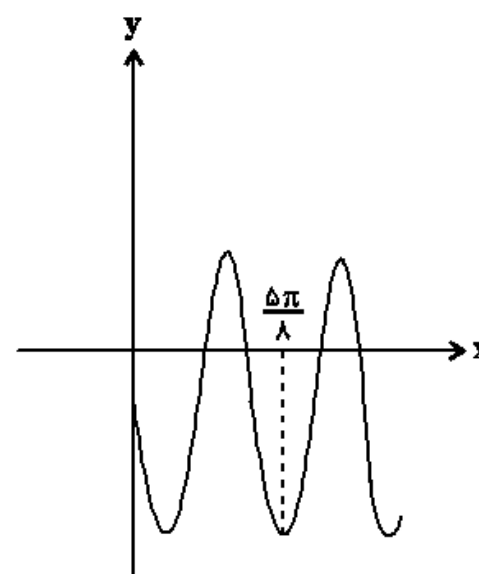
- (۱) π
- (۲) $\frac{\pi}{4}$
- (۳) $\frac{\pi}{2}$
- (۴) 2π

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

طول نقاط نمودار تابع $f(x) = 4 \tan \frac{x}{4}$ نسبت به نمودار تابع $y = \tan x$ دو برابر شده است، پس: $a = 2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi$

۲) شکل مقابل مربوط به قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a \sin bx \sin(\frac{\pi}{4} - bx) + c$ است. مقدار مثبت کدام است؟



۱) ۶

۲) ۴

۳) ۲

۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

ابتدا ضابطه تابع را ساده‌تر می‌نویسیم:

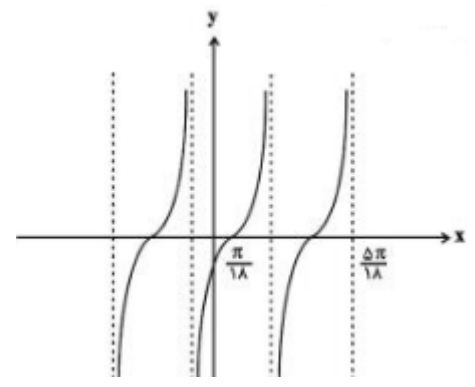
$$f(x) = a \sin bx \sin(\frac{\pi}{4} - bx) + c = a \sin bx \cos bx + c$$

$$= \frac{a}{2} \sin 2bx + c$$

با توجه به شکل داریم:

$$\frac{5}{4}T = \frac{5\pi}{\lambda} \Rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{|2b|} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

۳) شکل مقابل بخشی از نمودار تابع $f(x) = \tan(ax + b)$ است. مقدار $f(-\frac{\pi}{36})$ کدام است؟



(۱) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

(۲) $-\sqrt{3}$

(۳) -1

(۴) تعریف نشده

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

فاصله دو نقطه به طول‌های $\frac{\pi}{18}$ و $\frac{5\pi}{9}$ برابر با $1/5$ دوره تناوب است.

$$\frac{3}{2}T = \frac{5\pi}{9} - \frac{\pi}{18} \Rightarrow \frac{3}{2}T = \frac{\pi}{2} \Rightarrow T = \frac{\pi}{3}$$

از طرفی دوره تناوب تابع $f(x) = \tan(ax + b)$ برابر با $\frac{\pi}{|a|}$ است.

$$\frac{\pi}{|a|} = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{a>0} a = 3$$

تا این ضابطه تابع به شکل $f(x) = \tan(3x + b)$ شد. مقدار تابع به ازای $x = \frac{\pi}{18}$ صفر است.

$$\tan\left(\frac{\pi}{6} + b\right) = 0 \xrightarrow[\text{مثبت } f \text{ است}]{\text{ریشه}} \frac{\pi}{6} + b = 0 \rightarrow b = -\frac{\pi}{6}$$

البته برای b ، تمام مقادیر $k\pi - \frac{\pi}{6}$ را می‌توان در نظر گرفت.

$$\Rightarrow f(x) = \tan\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow f\left(-\frac{\pi}{36}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$$

④ دوره تناوب تابع $f(x) = a \sin(\frac{\pi}{3}(ax+1)) - \frac{5}{3}$ با بیشترین مقدار آن برابر است، کمترین مقدار تابع f کدام است؟

(۲) $-\frac{11}{3}$

(۴) $-\frac{17}{3}$

(۱) $-\frac{7}{3}$

(۳) $-\frac{14}{3}$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

بیشترین مقدار تابع برابر $|a| - \frac{5}{3}$ و دوره تناوب آن برابر $\frac{6\pi}{a}$ است. پس داریم:

$$|a| - \frac{5}{3} = \frac{4}{a} \Rightarrow 3a|a| - 5a = 12$$

$$a > 0 : 3a^2 - 5a - 12 = 0 \Rightarrow (a-3)(3a+4) = 0 \Rightarrow a = 3, a = -\frac{4}{3}$$

$$a < 0 : -3a^2 - 5a - 12 = 0 \Rightarrow 3a^2 + 5a + 12 = 0, \Delta < 0$$

پس کمترین مقدار تابع برابر است با:

$$-|a| - \frac{5}{3} = -3 - \frac{5}{3} = -\frac{14}{3}$$

⑤ تابع $f(x) = \tan(\frac{\pi x}{4} - \frac{\pi}{4})$ روی کدام بازه یکنواست؟

(۲) $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$

(۴) $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$

(۱) $(-1, \frac{1}{4})$

(۳) $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

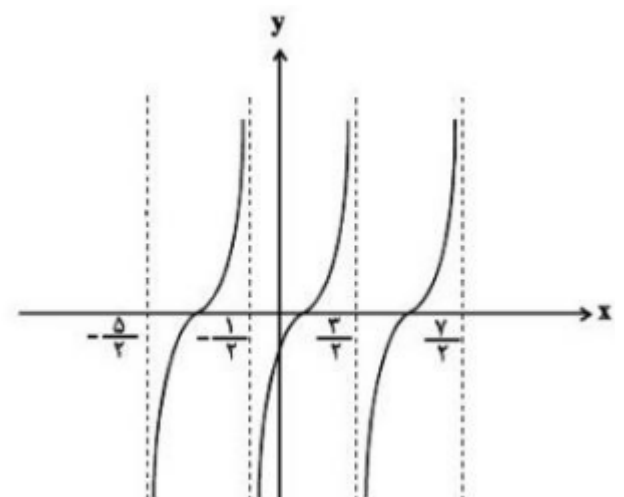
این تابع در هر بازه‌ای که تعریف شده باشد اکیداً صعودی است، پس دامنه تابع را به دست می‌آوریم.

$$\frac{\pi x}{4} \cdot \frac{\pi}{4} + (2k+1)\frac{\pi}{2} \Rightarrow x - \frac{1}{4} \neq 2k+1 \Rightarrow x \neq 2k + \frac{5}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

بنابراین بازه موردنظر نباید شامل عددی به صورت $2k + \frac{5}{4}$ ، $k \in \mathbb{Z}$ باشد که بازه $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ چنین است.

$$\begin{cases} k = -1 \rightarrow 2k + \frac{5}{4} = -\frac{1}{4} \\ k \in \mathbb{Z} \rightarrow 2k + \frac{5}{4} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$y = \tan x$ را $\frac{\pi}{4}$ واحد به سمت راست منتقل کنید سپس طول نقاط را بر $\frac{\pi}{4}$ تقسیم کنید. بدین ترتیب نمودار تابع f به دست می‌آید که روی بازه $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ اکیداً صعودی است.



۶) تابع متناوب $f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x; & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ را که دوره تناوب آن ۲ است، در نظر بگیرید. مساحت ناحیه محصور به منحنی f و محور x ها در بازه $[-0.75, 3.25]$ ، کدام است؟

۴ (۴)

۳/۵ (۳)

۳ (۲)

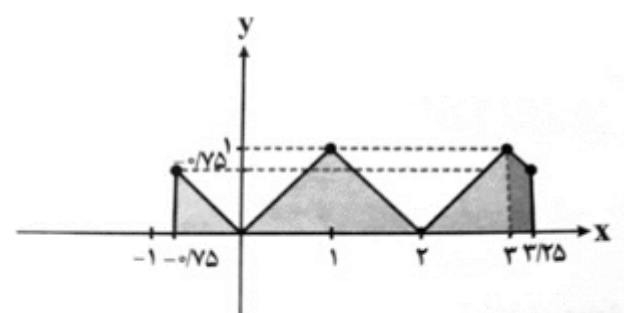
۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با رسم نمودار تابع f در بازه داده شده داریم:

$$f(x) = \begin{cases} x; & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x; & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



برای به دست آوردن مقدار تابع به ازای $x = -0.75$ و $x = 3.25$ داریم:

$$x = 3.25 \xrightarrow{3.25-2=1.25} f(1.25) = 2 - 1.25 = 0.75$$

$$x = -0.75 \xrightarrow{-0.75+2=1.25} f(1.25) = 2 - 1.25 = 0.75$$

مساحت مورد نظر برابر است با:

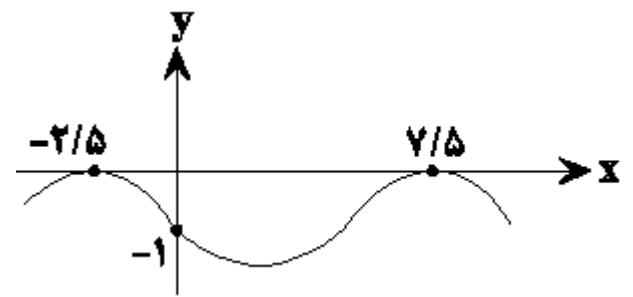
$$\frac{(\frac{3}{4})(\frac{3}{4})}{2} + \frac{2 \times 1}{2} + \frac{1 \times 1}{2} + \frac{(1+\frac{3}{4})(\frac{1}{4})}{2} = \frac{\frac{9}{16} + 3 + \frac{7}{16}}{2} = 2$$

روش دوم: مساحت مورد نظر، دو برابر مساحت زیر نمودار در بازه $[0, 2]$ است.

بنابراین:

$$S = 2 \times \left(\frac{2 \times 1}{2} \right) = 2$$

۷) نمودار زیر بخشی از نمودار تابع $f(x) = a + \cos \pi(\frac{1}{\varphi} - bx)$ است. حاصل ab کدام است؟



- (۱) $-\frac{1}{5}$
- (۲) $\frac{1}{5}$
- (۳) $\frac{1}{15}$
- (۴) $-\frac{1}{15}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$y = a + \cos\left(\frac{\pi}{\varphi} - b\pi x\right) = a + \sin(b\pi x)$$

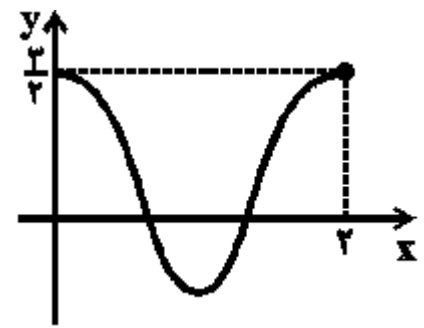
$$f(0) = -1 \Rightarrow a = -1$$

در عبور از $x = 0$ تابع نزولی است، پس $b < 0$ است:

$$T = 7/5 - (-2/5) = 10 = \frac{2\pi}{|b\pi|} \Rightarrow |b| = \frac{1}{5} \xrightarrow{b < 0} b = -\frac{1}{5}$$

$$ab = \frac{1}{5}$$

۸) اگر نمودار $y = a + \sin \pi(bx + \frac{1}{p})$ به صورت مقابل باشد، بیشترین مقدار $a+b$ کدام است؟



(۱) $-\frac{3}{2}$
(۳) $-\frac{2}{3}$

(۲) $-\frac{1}{4}$
(۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا ضابطه تابع را به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$y = a + \sin(b\pi x + \frac{\pi}{p}) = a + \cos b\pi x$$

عرض از مبدأ تابع برابر $\frac{3}{p}$ است، داریم:

$$x = 0 \rightarrow a + \cos 0 = a + 1 = \frac{3}{p} \Rightarrow a = \frac{1}{p}$$

از طرفی دوره تناوب نمودار تابع برابر ۲ است.

$$\Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = 2 \Rightarrow |b| = 1 \Rightarrow b = \pm 1$$

نمودار تابع کسینوس نسبت به محور y ها متقارن است، بنابراین هر دو مقدار b قابل قبول است. بیشترین مقدار

$$a+b \text{ به ازای } b=1 \text{ به دست خواهد آمد. } (a+b)_{\max} = \frac{1}{p} + 1 = \frac{3}{p}$$

۹) تابع متناوب $f(x)$ با دوره تناوب ۳ در بازه $[1, 4)$ به صورت $f(x) = x^2 + 1$ تعریف می‌شود. حاصل $f(67/5)$ کدام است؟

(۱) $\frac{13}{4}$

(۲) $\frac{29}{4}$

(۳) $\frac{53}{4}$

(۴) $\frac{11}{2}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

با توجه به متناوب بودن تابع $f(x)$ و دوره تناوب ۳ برای محاسبه $f(67/5)$ ، هر ضربی از عدد ۳ را می‌توانیم از $67/5$ کم کنیم تا به عددی در بازه $[1, 4)$ برسیم. پس ۲۲ تا ۳ از این عدد کم می‌کنیم.

$$\left. \begin{aligned} f(67/5) &= f(67/5 - 22 \times 3) \\ &= f(67/5 - 66) = f(1/5) \\ f(x) &= x^2 + 1 \quad x \in [1, 4) \end{aligned} \right\} f(1/5) = (1/5)^2 + 1 = (\frac{3}{p})^2 + 1$$

$$= \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}$$

۱۰) طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع $f(x) = \tan(x - \frac{\pi}{4})$ در آن یکنوا است، برابر کدام گزینه می‌باشد؟

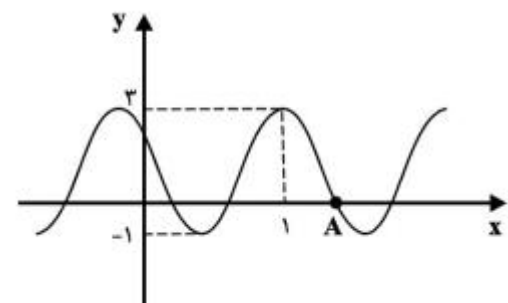
- (۱) π (۲) $\frac{\pi}{2}$ (۳) $\frac{3\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

تابع تانژانت در دوره تناوب خود اکیداً صعودی است. $T = \pi$

۱۱) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = a + b \sin c\pi x$ در شکل زیر رسم شده است. طول نقطه A کدام است؟



- (۱) $\frac{13}{9}$
(۲) $\frac{14}{9}$
(۳) $\frac{5}{3}$
(۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

بیشترین و کم‌ترین مقدار تابع به ترتیب ۳ و -۱ است، پس داریم:

$$\begin{cases} y_{\min} = a - |b| = -1 \\ y_{\max} = a + |b| = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 1, |b| = 2$$

چون در همسایگی $x = 0$ نمودار تابع نزولی است، $bc < 0$ خواهد بود. حال برای سادگی b را منفی و c را مثبت در نظر می‌گیریم. از روی نمودار مشخص است که $\frac{3}{4}$ برابر دوره تناوب نمودار برابر ۱ است.

$$\frac{3}{4}T = 1 \Rightarrow T = \frac{4}{3} = \frac{2\pi}{c\pi} = \frac{2}{c} = \frac{4}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow f(x) = 1 - 2 \sin \frac{3\pi x}{2}$$

نقطه A یکی از صفرهای تابع f است:

$$\xrightarrow{f(x)=0} \sin \frac{3\pi x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3\pi x}{2} = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{4k}{3} + \frac{1}{9} \\ \frac{3\pi x}{2} = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{4k}{3} + \frac{5}{9} \end{cases}$$

صفرهای مثبت تابع عبارت‌اند از $\frac{1}{9}, \frac{5}{9}, \frac{13}{9}, \frac{17}{9}, \dots$ طول نقطه A سومین صفر مثبت تابع یعنی $\frac{13}{9}$ است.

۱۲) اختلاف ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x) = a \sin \pi ax + 4$ برابر ۸ است. دوره تناوب تابع کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{4}$ (۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

بیشترین مقدار تابع $y_{\max} = |a| + 4$ و کمترین مقدار آن $y_{\min} = -|a| + 4$ است. داریم:

$$y_{\max} - y_{\min} = 2|a| = 8 \Rightarrow |a| = 4$$

از طرفی دوره تناوب نیز از رابطه $T = \frac{2\pi}{|\pi a|} = \frac{2}{|a|}$ به دست می‌آید:

$$\Rightarrow T = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

۱۳) در کدام تابع زیر، ماکزیمم تابع از مینیمم آن ۵ واحد بیش‌تر بوده و دوره تناوب آن $\frac{1}{3}$ است؟

$$\begin{aligned} y &= \frac{3}{2} + \frac{5}{2} \sin(6x) & (2) & \quad y = \frac{5}{2} - \frac{3}{2} \sin(2\pi x) & (1) \\ y &= \frac{5}{2} + \frac{3}{2} \cos(6\pi x) & (4) & \quad y = \frac{3}{2} - \frac{5}{2} \cos(6\pi x) & (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۳

در گزینه «۳» داریم:

$$\begin{cases} \text{Max} = \frac{3}{2} + \left| -\frac{5}{2} \right| = 4 \\ \text{Min} = \frac{3}{2} - \left| -\frac{5}{2} \right| = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{اختلاف} = 4 - (-1) = 5$$

$$T = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3}$$

۱۴) دوره تناوب نمودار تابع $y = \sin^2 x + \cos^2 x$ کدام است؟

- (۱) π (۲) 2π (۳) $\frac{\pi}{2}$ (۴) $\frac{\pi}{4}$

پاسخ: گزینه ۳

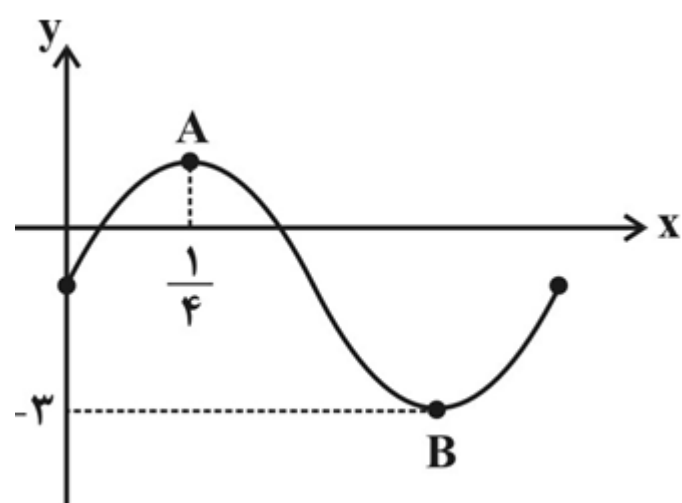
گزینه «۳»

$$y = \sin^2 x + \cos^2 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x$$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} (1 - \cos 4x)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4x \Rightarrow T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

۱۵) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = 2 \sin b\pi x + c$ به صورت زیر رسم شده است. طول پاره خط AB کدام است؟



- (۱) $\frac{\sqrt{17}}{2}$
 (۲) $\frac{\sqrt{65}}{2}$
 (۳) $\frac{\sqrt{17}}{4}$
 (۴) $\frac{\sqrt{65}}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$y_{\min} = -|a| + c = -2 + c = -3 \Rightarrow c = -1$$

با توجه به نمودار تابع $b > 0$ است و همچنین مشخص است که:

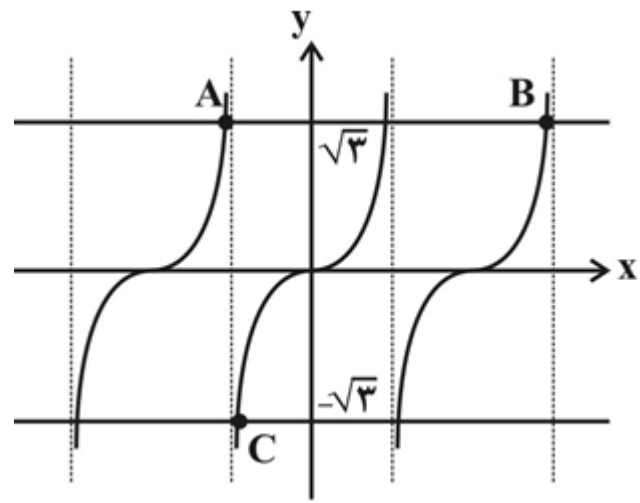
$$\frac{T}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b\pi|} = 1 \xrightarrow{b>0} b = 2$$

از طرفی داریم:

$$y_{\max} = |a| + c = 2 - 1 = 1 \Rightarrow A \left(\frac{1}{4}, 1 \right) \Rightarrow B \left(\frac{3}{4}, -3 \right)$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)^2 + (-3 - 1)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 16} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

۱۶) شکل زیر نمودار تابع $y = \tan ax$ است. اگر مساحت مثلث ABC برابر با $8\sqrt{3}\pi$ باشد، مقدار a کدام است؟

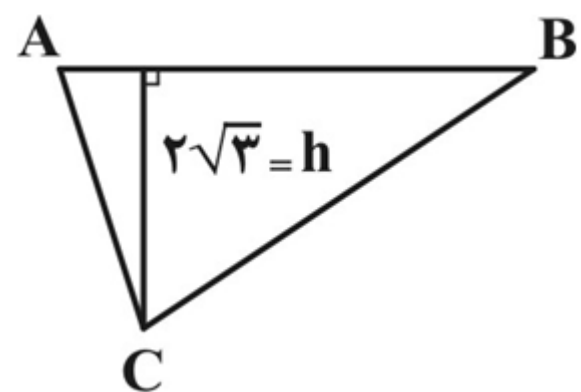


- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) $\frac{1}{4}$
- (۳) $\frac{2}{3}$
- (۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ارتفاع مثلث ABC، $2\sqrt{3}$ است.



از طرفی A و B به اندازه ۲ برابر دوره تناوب با هم فاصله دارند:

$$AB = 2 \times \frac{\pi}{|a|}$$

با توجه به شکل $a > 0$ است، پس داریم:

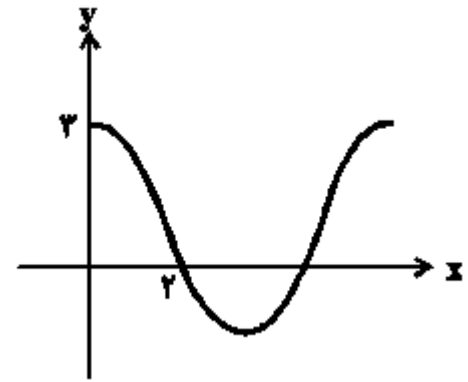
$$AB = \frac{2\pi}{a}$$

مساحت را حساب می‌کنیم و مساوی $8\sqrt{3}\pi$ قرار می‌دهیم:

$$S = \frac{AB \times h}{2} \Rightarrow 8\sqrt{3}\pi = \frac{\frac{2\pi}{a} \times 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 8\sqrt{3}\pi = \frac{2\sqrt{3}\pi}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

۱۷) قسمتی از نمودار تابع $f(x) = ۲ \cos(\frac{\pi x}{a}) + b$ به صورت زیر است. مقدار a کدام است؟



۱) ۶

۲) ۱۲

۳) ۳

۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

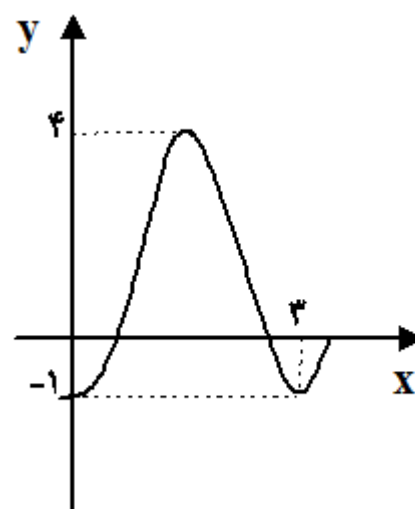
گزینه «۳»

با توجه به نمودار، دو نقطه با مختصات $(۰, ۳)$ و $(۲, ۰)$ روی نمودار قرار دارد. پس داریم:

$$\begin{cases} f(۰) = ۲ \cos(۰) + b = ۲ + b = ۳ \Rightarrow b = ۱ \\ f(۲) = ۲ \cos \frac{۲\pi}{a} + ۱ = ۰ \Rightarrow \cos \frac{۲\pi}{a} = -\frac{۱}{۲} = \cos \frac{۲\pi}{۳} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{اولین ریشه مثبت}} \frac{۲\pi}{a} = \frac{۲\pi}{۳} \Rightarrow a = ۳$$

۱۸) شکل زیر، بخشی از نمودار تابع $y = a \cos(b\pi x) + c$ را نشان می‌دهد، بیش‌ترین مقدار $a + b + c$ کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{3}$
- (۲) $-\frac{2}{3}$
- (۳) $-\frac{1}{3}$
- (۴) $-\frac{1}{3}$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

طبق روابط گفته شده در صفحه ۲۷ کتاب درسی داریم:

$$\begin{cases} y_{\max} = |a| + c = 4 \\ y_{\min} = -|a| + c = -1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{3}{2}, |a| = \frac{5}{2}$$

اما مقدار $a = -\frac{5}{2}$ قابل قبول است، زیرا نمودار داده شده قرینه یک نمودار کسینوسی نسبت به محور x هاست.

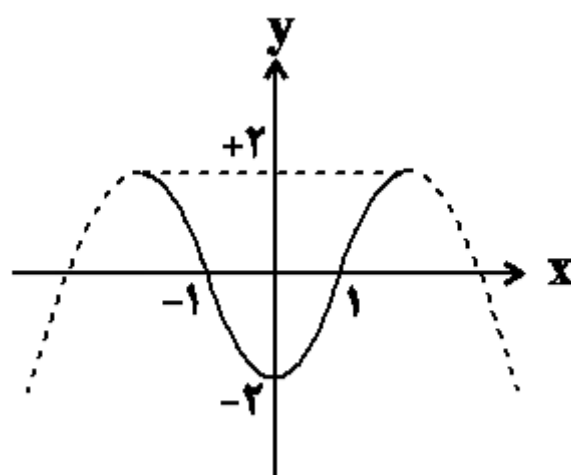
دوره تناوب نمودار هم، مشخص است که برابر با ۳ است.

$$T = \frac{2\pi}{|b|\pi} = \frac{2}{|b|} = 3 \Rightarrow |b| = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \pm \frac{2}{3}$$

هر دو مقدار b قابل قبول است؛ زیرا نمودار $y = \cos x$ نسبت به محور y ها متقارن است.

$$\begin{cases} b = -\frac{2}{3} : a + b + c = -\frac{5}{3} \\ b = \frac{2}{3} : a + b + c = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

۱۹) اگر شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = a \cos \pi(1 - bx)$ باشد، حاصل $a + b$ کدام می‌تواند باشد؟



- (۱) $-\frac{3}{2}$
- (۲) $-\frac{1}{2}$
- (۳) $-\frac{5}{2}$
- (۴) $\frac{5}{2}$

پاسخ: گزینه ۴

$$y = a \cos(\pi - b\pi x) = -a \cos(b\pi x)$$

نقاط $(0, -2)$ و $(1, 0)$ روی نمودار تابع هستند بنابراین:

$$۱) \quad -2 = -a \cos(0) \rightarrow a = 2$$

$$۲) \quad 0 = -2 \cos(b\pi) \rightarrow |b\pi| = \frac{\pi}{2} \Rightarrow b = \mp \frac{1}{2}$$

حال داریم:

$$\xrightarrow{(۱), (۲)} a + b = \frac{5}{2} \text{ یا } \frac{3}{2}$$